# Конспект лекций по математическому анализу А.В. Зароднюк

ПМИ ФКН ВШЭ, 2 курс, основной поток
2024-2025

Составители:

Смирнов Г.А.

Исходный код

# Содержание

# Лекция 1. Брусья и интеграл Римана

*10 сентября 2024 г.*

## 1.1 Брусья

**Определение (1.1):** *Замкнутым брусом (промежутком, координатным промежутком)* в $\mathbb{R}^n$ будем называть множество

$$I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i \ \forall i \in \{1, ..., n\}\} =: [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n].$$

Брусы бывают не только замкнутыми:

$$I = \{a_1, b_1\} \times ... \times \{a_n, b_n\}, \quad \text{где } \{,\} \text{ – отрезок / интервал / полуинтервал.}$$

**Определение (1.2):** *Мерой бруса* будем называть его объём.

*Обозначение:* $\mu(I) = |I| = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$

**Свойства меры бруса в $\mathbb{R}^n$**

1. **Однородность.** $\mu\big(I_{\lambda a, \lambda b}\big) = \lambda^n * \mu\big(I_{a,b}\big)$, где $\lambda \geq 0, a = \{a_1, ..., a_n\}, b = \{b_1, ..., b_n\}$.
2. **Аддитивность.** $I, I_1, ..., I_k$ – брусья, причём $I = \bigcup_{i=1}^{k}$ и $I_1, ..., I_k$ не имеют общих внутренних точек.

   Тогда $|I| = \sum_{i=1}^{k}|I_i|$.
3. **Монотонность.** Пусть $I \subset \cup_{i=1}^{k} I_i$ ($I$ покрыт конечной системой брусов).

   Тогда $|I| \leq \sum_{i=1}^{k}|T_i|$.

## 1.2 Интеграл Римана

**Определение (1.3):** Пусть $I$ – замкнутый невырожденный брус и $I = \bigcup_{i=1}^{k} I_i$, где $I_i$ – попарно не имеют общих внутренних точек.

Тогда набор $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^{k}$ будем называть *разбиением* бруса $I$.

**Определение (1.4):** *Диаметром* произвольного ограниченного множества $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть

$$d(M) = \sup_{x,y \in M} \parallel x - y \parallel,$$

где $\parallel x - y \parallel = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ – евклидово расстояние.

**Определение (1.5):** *Масштабом* разбиения $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^{k}$ будем называть число

$$\lambda(\mathbb{T}) = \Delta_{\mathbb{T}} = \max_{1 \leq i \leq k} d(I_i).$$

Пусть $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^{k}$ – разбиение бруса $I$. Пусть для всякого $I_i$ выбрана точка $\xi_i \in I_i$.

**Определение (1.6):** Набор $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{k}$ будем называть *отмеченными точками.*

**Определение (1.7):** $(\mathbb{T}, \xi)$ будем называть *размеченным разбиением.*

Пусть $I$ – невырожденный замкнутый брус и $f : I \to \mathbb{R}$.

**Определение (1.8):** *Интегральной суммой Римана* функции $f$ на $(\mathbb{T}, \xi)$ будем называть величину $\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \coloneqq \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) * |I_i|$.

**Определение (1.9):** Будем говорить, что функция $f$ *интегрируема (по Риману)* на замкнутом брусе $I$ ($f : I \to \mathbb{R}$), если

$$\exists A \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \sigma > 0 : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \sigma \to |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - A| < \varepsilon.$$

Тогда

$$A = \int\limits_I f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{I} ... \int f(x_1, ..., x_n)\mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n$$

*Обозначение:* $f \in R(I)$.

*Пример (1):* $f = \mathrm{const}$

$$\forall (\mathbb{T}, \xi) : \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{const} * |I_i| = \mathrm{const} * |I|$$

$$\int\limits_I f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{const} * |I|$$

*Пример (2):*

$$I = [0, 1]^n, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \forall i \in \{1, ..., n\} : x_i \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Для любого $\mathbb{T}$ можно выбрать $\tilde{\xi}_i \in \mathbb{Q}^n$, тогда для такого $(\mathbb{T}, \xi)$

$$\sigma\left(f, \mathbb{T}, \tilde{\xi}\right) = \sum_{i=1}^{k} 1 * |I_i| = |I| = 1$$

Для любого $\mathbb{T}$ также можно выбрать $\hat{\xi}_i \notin \mathbb{Q}^n$. Тогда

$$\sigma\left(f, \mathbb{T}, \hat{\xi}\right) = \sum_{i=1}^{k} 0 * |I_i| = 0.$$

Тогда $f \notin R(I)$.

*Пример (3):* Рассматривая разбиения на квадраты $\frac{1}{n}$ на $\frac{1}{n}$ с точками с максимальными координатами (правый верхний угол) в качестве отмеченной точки в каждом квадрате, найдите двойной интеграл:

$$\iint\limits_{\substack{0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$f = x * y, \quad |I_i| = \frac{1}{n^2}$$

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{i}{n} * \frac{j}{n}$$

$$\sigma(f, \mathbb{T}_n, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^2} * \frac{i}{n} * \frac{j}{n} = \frac{1}{n^4} * \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} i * j$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1}}\!\!\int xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \lim_{n\to+\infty} \sigma(f, \mathbb{T}_n, \xi_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4} * \sum_{i=1}^{n} i * \frac{n(n+1)}{2} = \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4} * \frac{n(n+1)}{2} * \sum_{i=1}^{n} i = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4} * \frac{n(n+1)}{2} * \frac{n(n+1)}{2} = \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

# Лекция 2. Кратный интеграл Римана и множества меры нуль

*17 сентября 2024 г.*

## 2.1 Свойства кратного интеграла

1. **Линейность.**

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \ f, g \in R(I) : (\alpha * f + \beta * g) \in R(I)$$

$$\int\limits_I (\alpha * f + \beta * g)\,\mathrm{d}x = \alpha * \int\limits_I f\,\mathrm{d}x + \beta * \int\limits_I g\,\mathrm{d}x$$

**Доказательство:**

$$f \in R(I) : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_1 > 0 : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_1, \left| \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \underbrace{\int\limits_I f\,\mathrm{d}x}_{A_f} \right| =$$

$$= \left|\sigma_f - A_f\right| < \varepsilon$$

$$g \in R(I) : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_2 > 0 : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_2, \left|\sigma_g - A_g\right| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \left|\delta_{\alpha f + \beta g} - A_{\alpha f + \beta g}\right| &= \left|\alpha * \sigma_f + \beta \sigma_g - \alpha A_f - \beta A_g\right| \le \\ &\le |\alpha| * \left|\sigma_f - A_f\right| + |\beta| * \left|\sigma_g - A_g\right| < \\ &< (|\alpha| + |\beta|) * \varepsilon \end{aligned}$$

■

2. **Монотонность.**

$$\rceil f, g \in R(I), \quad f \le g \text{ на } I$$

$$\Rightarrow \int\limits_I f\,\mathrm{d}x \le \int\limits_I g\,\mathrm{d}x$$

**Доказательство:**

$$f \in R(I) \Rightarrow \exists A_f \in \mathbb{R} : \left|\sigma_f - A_f\right| < \varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\ \forall (\mathbb{T}, \xi)\ \Delta_{\mathbb{T}} < \delta)$$

Аналогично для $g$.

$$A_f - \varepsilon < \underbrace{\sigma_f}_{\sum_i f(\xi_i) * |I_i|} \le \underbrace{\sigma_g}_{\sum_i g(\xi_i) * |I_i|} < A_g + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 : A_f < A_g + 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow A_f \le A_g$$

■

3. **Оценка интеграла (сверху):**

$$f \in R(I) \Rightarrow \left|\int\limits_I f \,\mathrm{d}x\right| \le \sup_I |f| * |I|$$

**Доказательство:**

$$f \in R(I) \Rightarrow f \text{ ограничена на } I$$

$$-\sup_I |f| \le f \le \sup_I |f|$$

$$-\sup_I |f| * |I| = -\int\limits_I \sup_I |f| \,\mathrm{d}x \le \int f \,\mathrm{d}x \le \int \sup_I |f| \,\mathrm{d}x = \sup_I |f| * |I|$$

$$-\sup_I |f| * |I| \le A_f \le \sup_I |f| * |I|$$

■

**Теорема (2.1, необходимое условие):**

$$I - \text{замкнутый брус}, \quad f \in R(I) \Rightarrow f \text{ ограничена на } I$$

**Доказательство:** от противного.

$$f \in R(I) \Rightarrow \exists A_f \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta \Rightarrow \left|\sigma_f - A_f\right| < \varepsilon$$

Пусть $f$ неограничена на $I$. Но тогда $f \in R(I) \Rightarrow \forall \mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^k : \exists i_0 : f$ неограничена на $I_{i_0}$.

Тогда можно представить так:

$$\sigma_f = \sum_{i \ne i_0} f(\xi_i) * I_i + f\left(\xi_{i_0}\right) * \left|I_{i_0}\right|$$

Тогда мы можем выбирать $\xi_{i_0}$ на $I_{i_0}$ так, что $\sigma_f$ будет сколь угодно велика.

Противоречие. Следовательно $f$ ограничена на $I$.

■

## 2.2 Множества меры нуль по Лебегу

**Определение (2.1):** Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть *множеством меры нуль по Лебегу*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует не более чём счётный набор брусов $\{I_i\}$, такой, что:
- $M \subset \cup_i I_i$
- $\sum_i |I_i| < \varepsilon$

*Пример:* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – множество меры нуль (по Лебегу) в $\mathbb{R}^n$.

**Доказательство:**

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists I = \left[x_{01} - \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{3}; x_{01} + \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{3}\right] \times \ldots \times \left[x_{n1} - \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{3}; x_{n1} + \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{3}\right]$$

$$x_0 \in I, |I| = \left(2 * \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{3}\right)^n < \left(2 * \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2}\right)^n = \varepsilon$$

Значит $\{I\}$ – искомый набор брусов, а $\{x_0\}$ – множество меры нуль.

■

## 2.3 Свойства множества меры нуль по Лебегу

1. Если брусы в определении делать открытыми, то определение остаётся верным.

**Доказательство:**

**1. От замкнутых к открытым.**

Пусть $\{I_i\}$ – открытые брусы, $M \subset \bigcup_i I_i$. Пусть $\{\overline{I_i}\}$ – замкнутые брусы $I_i$.

$$M \subset \cup_i I_i \subset \bigcup_i \overline{I_i}, \quad |I_i| = |\overline{I_i}|$$

Если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \{I_i\} : M \subset \bigcup_i I_i, \quad \sum_i |I_i| < \varepsilon,$$

то

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \{\overline{I_i}\} : M \subset \bigcup_i \overline{I_i}, \quad \sum_i |\overline{I_i}| < \varepsilon.$$

■

**2. От открытых к замкнутым.**

Пусть $\{I_i\}$ – замкнутые брусы.

$$I_i = [a_1^i, b_1^i] \times ... \times [a_n^i, b_n^i]$$

$$V_1 = \sum_i |I_i|$$

Растянем брусы вдвое.

$$D_i := \left(\frac{a_1^i + b_1^i}{2} - (b_1^i - a_1^i); \frac{a_1^i + b_1^i}{2} + (b_1^i - a_1^i)\right) \times ...$$

$$V_2 = \sum_i |D_i| = 2^n * V_1$$

Пусть мы выбрали $\{I_i\}$ так, что $V_1 < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Мы можем это сделать для любого $\varepsilon > 0$. Тогда $V_2 < \varepsilon$. При этом $D_i \supset I_i$. Тогда $\{D_i\}$ – искомый набор открытых брусов.

■

# Лекция 3. Топология в $\mathbb{R}^n$

*1 октября 2024 г.*

## 3.1 Объединение множеств меры нуль

Первые 10 минут лекции ушли на настройку микрофонов.

**Теорема (2):** Пусть $M$ – множество меры нуль по Лебегу, $L \subset M$ – подмножество $M$ => $L$ – множество меры нуль по Лебегу.

**Доказательство:**

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \text{ не более чем счётное } \{I_i\} :$$
$$L \subset M \subset \bigcup I_i, \quad \sum |I_i| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow L - \text{множество меры нуль по Лебегу}$$

**Теорема (3):** Не более чем счётное объединение множеств меры нуль по Лебегу является множеством меры нуль.

**Доказательство:**

$$\rceil \{M_i\} - \text{не более чем счётный набор, где } \forall i : M_i \text{ – множество меры нуль.}$$

$$\Rightarrow \forall i : \forall \varepsilon_i : \exists \text{ не более чем счётный набор брусов } \{I_j^i\}$$

Тогда

$$M \coloneqq \bigcup M$$

$$M \subset \bigcup I_j^i$$

$$\text{Хотим, чтобы } \forall \varepsilon > 0 : \sum_{i,j} |I_j^i| < \varepsilon.$$

Заметим, что ряд $\sum_{i,j} |I_j^i|$ точно не является условно сходящимся. Тогда мы имеем право написать следующее:

$$\sum_{i,j} |I_j^i| = \sum_i \sum_j |I_j^i| < \sum_i \varepsilon_i < \varepsilon$$

Последнее неравенство пока не доказано, именно его нам надо доказать, чтоб доказать изначальное утверждение. Рассмотрим два случая:

**1.** $\{M_i\}_{i=1}^N$ **– конечный набор.**

$$\rceil \varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{N+1}$$

$$\varepsilon_i + \ldots + \varepsilon_N = \frac{N}{N+1} \varepsilon < \varepsilon$$

**2.** $\{M_i\}_{i=1}^{+\infty}$ **– счётное множество.**

$$\rceil \varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{2^i}$$

$$\sum_i \varepsilon_i = \sum_i^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} < \varepsilon$$

■

## 3.2 Топология в $\mathbb{R}^n$

$$\rceil M \subseteq \mathbb{R}^n$$

**Определение (3.1):** $x_0 \in M$ называется *внутренней точкой* $M$, если $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subseteq M$.

Напомним, что $B_r(x)$ – окрестность радиуса $r$ вокруг точки $x$.

Тут был перерыв на замену батареек в микрофоне и рассуждение о том, почему контрольные и колки должны быть в субботу.

**Определение (3.2):** $x_0 \notin M$, $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M$ называется *внешней точкой* $M$, если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus M.$$

**Определение (3.3):** $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется *граничной точкой* $M$, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \begin{cases} B_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \varnothing \\ B_\varepsilon(x_0) \cap \mathbb{R}^n \setminus M \neq \varnothing \end{cases}$$

*Обозначение:* $\partial M$ – *граница* (множество граничных точек) $M$.

*Пример:*

$$M = [0; 1) \cup \{3\}$$

$(0; 1)$ — внутренние точки

$(-\infty; 0) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$ — внешние точки

$\{0, 1, 3\}$ — граничные точки

**Определение (3.4):** $x_0 \in M$ называется *изолированной точкой* $M$, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \mathring{B}_\varepsilon(x_0) \cap M = \varnothing.$$

Напомним, что $\mathring{B}_r(x)$ – выколотая окрестность радиуса $r$ вокруг точки $x$.

**Определение (3.5):** $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой* $M$, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \mathring{B}_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \varnothing.$$

*Следствие:* Изолированные точки никогда не являются предельными.

*Пример:* Для $M$ из предыдущего примера:

$[0, 1]$ – предельные точки, $3$ – не предельная.

**Определение (3.6):** $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется *точкой прикосновения* для $M$, если

$$\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \varnothing.$$

*Следствие:* Точки прикосновения = внутренние ∪ граничные = предельные ∪ изолированные.

**Определение (3.7):** Множество всех точек прикосновения $M$ называется замыканием $M$.

*Обозначение:* $\overline{M}$.

*Примеры:*

1. Для $M$ из предыдущих примеров:

$$\overline{M} = [0; 2] \cup \{3\}$$

$[0; 2]$ — множество предельных точек $M$

2. $$M := [0; 1] \cap \mathbb{Q}$$

$$\overline{M} = [0; 1]$$

**Определение (3.8):** Множество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если все его точки внутренние.

**Определение (3.9):** Множество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если $\mathbb{R}^n \setminus M$ открыто.

*Следствие:* $\varnothing$ – открыто и замкнуто одновременно.

*Примеры:*
- $(0; 1)$ – открытое.
- $[0; 1]$ – замкнутое.
- $(0; 1]$ – ни открытое, ни замкнутое.

**Определение (3.10):** $M$ называется *ограниченным*, если

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists r > 0 : M \subseteq B_r(x_0).$$

**Определение (3.11):** Множество $K$ в $\mathbb{R}^n$ называется *компактом*, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

*Следствие:* Если хоть для какого-то покрытия $M$ условие не выполняется, то $K$ – не компакт.

*Пример:* $M = (0; 1)$

$$\{A_k\}_{k=1}^{\infty} : A_k = \left(0; 1 - \frac{1}{k}\right)$$

$$M \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

Но какое бы мы ни выбрали конечное $N$,

$$M \not\subseteq \bigcup_{k=1}^{N} A_k.$$

Значит конечное подпокрытие из покрытия $\{A_k\}$ выделить нельзя. Значит $M$ – не компакт.

**Теорема (Критерий замкнутоски в $\mathbb{R}^n$):** Множество замкнуто тогда и только тогда, когда содержит все свои предельные точки.

**Доказательство:** Для начала, докажем, что если множество замкнуто, то оно содержит все свои предельные точки. Докажем от противного.

Пусть $M$ замкнуто. Пусть $M$ содержит не все свои предельные точки.

Пусть $x_0$ – предельная точка в $M$, но $x_0 \notin M$. Тогда $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M$.

По условию $M$ замкнуто, т.е. $\mathbb{R}^n \setminus M$ открыто, т.е. все его точки внутренние.

Следовательно, для $x_0$ $\exists r > 0 : B_r(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus M$.

Но так как $x_0$ предельная, то $\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \varnothing$.

Противоречие. Следовательно, $M$ содержит все свои предельные точки.

Доказательство достаточного условия остаётся на следующий раз, либо в качестве упражнения читателю.

# Лекция 4. Критерии компактности

*8 октября 2024 г.*

**Теорема:** Пусть $I \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутый брус. Тогда $I$ – компакт.

**Доказательство:**

$$I = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$$

Доказывать будем от противного. Пусть существует покрытие $I$ открытыми множествами $\{A_\alpha\}$, не допускающее выделение конечного подпокрытия.

Поделим каждую сторону пополам, получим $2^n$ брусков. Так как из $\{A_\alpha\}$ нельзя выделить конечное подпокрытие, то и среди этих брусов существует брус $I_1$, для которого такое подпокрытие также нельзя выделить – иначе мы бы просто могли взять конечное подпокрытие для каждого из подбрусков и объединить, получив конечное подпокрытие для $I$. Заметим, что аналогичное рассуждение можно применить к $I_2$ и найти в нём вдвое меньший (по длине стороны) подбрус $I_2$, для которого нельзя выделить минимальное подпокрытие. И так далее:

$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset ...$$

Мы получим последовательность вложенных брусов, а по каждой из координат мы получим последовательность вложенных отрезков. Значит существует единственная точка $a = (a_1, ..., a_n)$, принадлежащая всем этим брусам.

$$a \in I \Rightarrow a \in \bigcup A_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0 : a \in A_{\alpha_0}$$

Так как $A_\alpha$ – открытые множества, то существует $\varepsilon > 0$, такое, что $B_\varepsilon(a) \subset A_{\alpha_0}$. Но тогда бруски $I_i$ начиная с некоторого $i$ попадут в $B_\varepsilon(a)$, а значит и в $A_{\alpha_0}$, а значит для них можно будет выделить конечное подпокрытие, состоящее из одного элемента $A_{\alpha_0}$. Противоречие.

Значит $I$ – компакт.

■

*Замечание:* Любое ограниченное множество можно вписать в замкнутый брус.

**Теорема (Критерий компактности):**

$$\rceil K \in \mathbb{R}^n$$

$$K - \text{компакт} \Leftrightarrow K - \text{замкнуто и ограничено}$$

**Доказательство:**

- Необходимость. $\Rightarrow$
  - Ограниченность:

$$K - \text{компакт} \Rightarrow \text{можно выбрать конечное подпокрытие в } \{B_m(0)\}_{m=1}^{\infty}$$

$$\Rightarrow \exists m_0 : K \subset \bigcup_{m=1}^{m_o} B_m(0) \Rightarrow K \subset B_{m_0}(0)$$

$$\Rightarrow \text{по определению } K \text{ ограничено}$$

■

- Замкнутость (от противного): Выберем точку $x_0$, такую, что $x_0$ – предельная точка $K$, но $x_0 \notin K$.

  Построим $\left\{B_{\delta(x)/2}(x)\right\}_{x \in K}$, где $\delta(x) = \rho(x, x_0)$.

  Заметим, что $B_{\delta(x)/x}(x)$ – шар вокрух $x$ радиуса половины расстояния между $x_0$ и $x$.

  Так как $K$ – компакт, то

$$\exists x_1, ..., x_s : K \subset \bigcup_{i=1}^{s} B_{\delta(x_i)/2}(x_i)$$

$$\delta := \min_{1 \leq i \leq s} \{\delta(x_i)\}$$

$$B_{\delta/2}(x_0) \cap \bigcup_{i=1}^{s} B_{\delta(x_i)/2}(x_i),$$

  так как $B_{\delta/2}(x_0)$ – это шар вокруг точки $x_0$ с радиусом, равным половине расстояния между $x_0$ и ближайшей к ней точке из $\{x_1, ..., x_s\}$. Тогда $B_{\delta/2}(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus K$. Тогда $x_0$ – не предельная точка $K$. Противоречие.

  Значит $K$ содержит все свои предельные точки и потому замкнуто.

■

- Достаточность. $\Leftarrow$ Пусть $K$ – замкнуто и ограничено.

$$K \text{ ограничено} \Rightarrow \exists I - \text{замкнутый брус} : K \subset I$$

Пусть $\{A_\alpha\}$ – произвольное покрытие открытыми множествами для $K$.

$$I \subset \{A_\alpha\} \cup \underbrace{\{\mathbb{R}^n \setminus K\}}_{\text{открыто}}, \text{так как } I \text{ – компакт} \Rightarrow$$

$$\exists \text{ конечное подпокрытие } \left\{A_{\alpha_i}\right\}_{i=1}^{m} \cup \{\mathbb{R}^n \setminus K\}$$

$$\Rightarrow K \subset \left\{A_{\alpha_i}\right\}_{i=1}^{m}$$

Таким образом, мы нашли конечное подпокрытие $K$ в произвольном покрытии открытыми множествами, а значит $K$ – компакт.

■

# Лекция 5. Теорема Вейерштрасса

*15 октября 2024 г.*

**Теорема (Вейерштрасса):**

Пусть $K$ – компакт $\subset \mathbb{R}^n$, $f : K \to \mathbb{R}$, $f$ непрерывна на $K$.

Тогда $f$ – ограничена на $K$ и достигает своего наибольшего и наименьшего значения.

**Доказательство:**

- Докажем, что $f$ ограничена, от противного.

  Предположим, что $f$ не ограничена.

  Так как $f$ – не ограничена, мы можем выбрать расходящуюся последовательность

  $$\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset K : |f(x_m)| > m.$$

  Так как $K$ ограничено,

  $$\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in K \hookrightarrow \|x\| \leq C.$$

  Тогда последовательность $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ ограничена.

  Тогда для любого $i \in \{1, ..., n\}$ последовательность $\{x_m^i\}_{m=1}^{\infty}$, где $x_m = (x_m^1, x_m^2, ..., x_m^n)$, тоже ограничена, так как

  $$|x^i| \leq \sqrt{(x^i)^2} \leq \sqrt{(x^1)^2 + ... + (x^n)^2} = \|x\| \leq C.$$

  Теперь можно применить теорму Больцано-Вейерштрасса о том, что из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящеюся подпоследовательность.

  В последовательности $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ существует подпоследовательность $\left\{x_{m_{i_1}}\right\}_{i_1=1}^{\infty}$, у которой первая координата сходится: $\lim\limits_{i_1 \to \infty} x_{m_{i_1}}^1 = a_1$.

  В последовательности $\left\{x_{m_{i_1}}\right\}_{i_1=1}^{\infty}$ существует подпоследовательность $\left\{x_{m_{i_2}}\right\}_{i_2=1}^{\infty}$, у которой первые две координаты сходятся: $\lim\limits_{i_2 \to \infty} x_{m_{i_2}}^2 = a_2$.

  И так далее до $\left\{x_{m_{i_n}}\right\}_{i_n=1}^{\infty}$.

  Тогда

  $$\lim_{i_n \to \infty} x_{m_{i_n}} = (a_1, ..., a_n) =: a.$$

  Можно видеть, что $a$ является предельной точкой $K$, поэтому сущесвует предел

  $$\lim_{i_n \to \infty} f\left(x_{m_{i_n}}\right) = f(a),$$

  но так как по построению $\lim\limits_{m \to \infty} f(x_m) = \infty$ расходится, то и $\lim\limits_{i_n \to \infty} f\left(x_{m_{i_n}}\right) = \infty$.

  Противоречие. Значит $f$ ограничена на $K$.

■

- Докажем достижимость наибольшего значения $f$ на $K$. Достижимость наименьшего доказывается аналогично.

  Возьмем последовательность $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$, такую, что $\sup\limits_K f - \frac{1}{m} \le f(y_m) \le \sup\limits_K f$. Аналогично построению в прошлой части доказательства, можно выделить в ней подпоследовательность $y_{m_{j_n}} \to a$. Тогда при переходе к пределу получаем

$$\sup_K f \le f(a) \le \sup_K f \Rightarrow f(a) = \sup_K f.$$

■

**Определение (5.1):** Колебанием $f$ на множестве $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть число

$$\omega(f, M) \coloneqq \sup_{x,y \in M} |f(x) - f(y)| = \sup_{x \in M} f(x) - \inf_{y \in M} f(x)$$

**Определение (5.2):** Колебанием $f$ в точке $x_0 \in M$ будем называть число

$$\omega(f, x_0) \coloneqq \lim_{r \to 0+} \omega(f, B_r^M(x_0)), \quad \text{где } B_r^M(x_0) = B_r(x_0) \cap M$$

**Заметим:** $f : M \to R$ — непрерывна в $x_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \forall x \in B_\delta^M(x_0) \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

**Теорема (о колебаниях непрерывной в точке функции):**

Пусть $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$, $f : M \to R$, тогда

$$f \text{ непрерывна в точке } x_0 \iff \omega(f, x_0) = 0$$

**Доказательство:**

- $\Longrightarrow$

  $f$ – непрерывна, то есть $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta^M(x_0) \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,

$$\omega(f, x_0) = \lim_{\delta \to 0+} \omega\big(f, B_\delta^M(x_0)\big)$$

$$\omega\big(f, B_\delta^M(x_0)\big) = \sup_{x,y \in B_\delta^M(x_0)} |f(x) - f(y)| =$$
$$= \sup_{x,y \in B_\delta^M(x_0)} |f(x) - f(x_0) + f(x_0) - f(y)| \le 2 \sup_{x,y \in B_\delta^M(x_0)} |f(x) - f(x_0)| \le 2\varepsilon$$

  При $\varepsilon \to 0, \delta \to 0 \Rightarrow \omega\big(f, B_\delta^M(x_0)\big) \to 0 \Rightarrow \omega(f, x_0) = 0$

■

- $\Longleftarrow$

  Имеем $\lim\limits_{\delta \to 0+} \sup\limits_{x,y \in B_\delta^M(x_0)} |f(x) - f(y)| = \omega(f, x_0) = 0$. По определению предела получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \forall x, y \in B_\delta^M(x_0) \hookrightarrow \sup_{x,y \in B_\delta^M(x_0)} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

  тогда при $y = x_0$ выполнено

$$|f(x) - f(x_0)| \le \sup |f(x) - f(x_0)| \le \sup |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

■

**Определение (5.3):** Если какое-то свойство не выполняется только на множестве меры нуль по Лебегу, то будем говорить, что оно выполняется почти всюду.

**Теорема (критерий Лебега):**

Пусть $I \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутый невыражденый брус, $f : I \to \mathbb{R}$, тогда

$$f \in R(I) \Longleftrightarrow f \text{ – ограничена на } I \text{ и непрерывна почти всюду}$$

Доказательства не будет.

**Определение:** $\mathbb{T}_1 = \left\{I_k^1\right\}, \mathbb{T}_2 = \left\{I_m^2\right\}$ – разбиения $I$, тогда $\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$ будем называеть множество $\left\{I_{ij}\right\}$ : $\forall I_{ij}$ одновременно выполняются следующие условия
1. $\exists k$ : $I_{ij}$ входит в разбиение $I_k^1$
2. $\exists m$ : $I_{ij}$ входит в разбиение $I_m^2$
3. $I_{ij}$ входит в разбиение $I$

# Лекция 6. Сумма Дарбу. Интеграл Дарбу.

*22 октября 2024 г.*

## 6.1 Измельчение разбиения

**Определение:** Разбиение $\mathbb{T}_1 = \left\{I_i^1\right\}_{i=1}^{m_1}$ называется измельчением разбиения $\mathbb{T}_2 = \left\{I_j^2\right\}_{i=1}^{m_2}$, если $\forall i \exists j \in \left\{\overline{1, m_2}\right\}$ что $I_i^1$ входит в разбиение $I_j^2$

*Замечание:* $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$ - разбиения $I \Rightarrow \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$ измельчение $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$

## 6.2 Суммы Дарбу

Пусть дан замкнутый брус $I \subset \mathbb{R}^n$, функция $f : I \to \mathbb{R}$ и разбиение $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^{k}$. Введём:

$$m_i \coloneqq \inf_{x \in I_i}(f(x)), M_i \coloneqq \sup_{x \in I_i}(f(x))$$

**Определение:** Назовем соответственно нижней и верхней суммой Дарбу соответственно числа

$$\underline{s} \coloneqq \sum_{i=1}^{k} m_i |I_i|,\ \overline{S} \coloneqq \sum_{i=1}^{k} M_i |I_i|$$

**Теорема (Свойства сумм Дарбу):**

$\underline{s} \coloneqq \underline{s}(f, \mathbb{T}), \overline{S} \coloneqq \overline{S}(f, \mathbb{T})$ (подчеркиваем зависимость сумм от выбранной функции и разбиения)

1. $\underline{s} = \inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \le \sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \overline{S}$
2. $\tilde{\mathbb{T}}$ – измельчение разбиения $\mathbb{T} \Rightarrow \underline{s}(f, \mathbb{T}) \le \underline{s}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \le \overline{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \le \overline{S}(f, \mathbb{T})$
3. $\forall \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$ – произвольные разбиения $\hookrightarrow \underline{s}(f, \mathbb{T}_1) \le \overline{S}(f, \mathbb{T}_2)$

**Доказательство:**

1. $$\underline{s} = \sum_{i=1}^{k} \inf_{\xi_i \in I_i}(f(x))|I_i| \underbrace{=}_{\xi = (\xi_1 \dots \xi_k)} \inf_{\xi} \underbrace{\sum_{i=1}^{k} f(x)|I_i|}_{\sigma(f, \mathbb{T}, \xi)} \underbrace{\le}_{\text{очевидно}} \sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \underbrace{=}_{\text{по аналогии как в начале}} \overline{s}(f, \mathbb{T})$$

2. $$\forall L \subset M \hookrightarrow \inf_{L} \ge \inf_{M};\ \sup_{L} \le \sup_{M}$$

   Просуммировав по всем брусам $\tilde{\mathbb{T}}$ как по подмножествам брусков из $\mathbb{T}$, заключаем:

   $$\underline{s}(f, \mathbb{T}) \le \underline{s}(f, \tilde{\mathbb{T}})$$

   $$\inf \le \sup \Rightarrow \underline{s}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \le \overline{S}(f, \tilde{\mathbb{T}})$$

   $$\overline{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \le \overline{S}(f, \mathbb{T})$$

3. $\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$ - измельчение $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$. Тогда из п.2

   $\underline{s}(f, \mathbb{T}_1) \le \underline{s}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) \le \overline{S}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) \le \overline{S}(f, \mathbb{T}_2)$■

## 6.3 Интеграл Дарбу

**Определение:**

$$\overline{\mathcal{J}} = \inf_{\mathbb{T}} \overline{S}(f, \mathbb{T}),\ \underline{\mathcal{J}} = \sup_{\mathbb{T}} \underline{S}(f, \mathbb{T})$$

назовем верхним и нижним интегралом Дарбу соответственно.

**Теорема (Интеграл Дарбу как предел сумм Дарбу):** Дан замкнутый брус $I \subset \mathbb{R}^n$, ограниченная функция $f : I \to \mathbb{R}$. Тогда

$$\overline{\mathcal{J}} = \lim_{\Delta \to 0} \overline{S}(f, \mathbb{T}),\ \underline{\mathcal{J}} = \lim_{\Delta \to 0} \underline{s}(f, \mathbb{T})$$

**Доказательство:** Докажем, что $\underline{\mathcal{J}} = \lim\limits_{\Delta \to 0} \underline{s}(f, \mathbb{T})$, второе аналогично.

1. $f$ ограничена на $I \Rightarrow \exists c > 0 \forall x \in I \hookrightarrow |f(x)| < c$
2. По определению $\underline{\mathcal{J}} = \sup\limits_{\mathbb{T}} \underline{s}(f, \mathbb{T}) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \mathbb{T}_1 = \{I_i^1\}_{i=1}^k : \underline{\mathcal{J}} - \varepsilon < \underline{s}(f, \mathbb{T}) \leq \underline{\mathcal{J}} < \underline{\mathcal{J}} + \varepsilon$
3. $$G := \bigcup_{i=1}^k \partial I_i^1 \text{ объединение границ брусов без повторений}$$

$\forall i\ \partial I_i$ - множества меры нуль по Лебегу $\Rightarrow G$ тоже как конечное объединение.

4. $\mathbb{T}_2 = \{I_i^2\}_{i=1}^s$ - произвольное разбиение $I$. Рассмотрим два множества брусов.

$$A = \{I_i^2 \in \mathbb{T}_2 \mid I_i^2 \cap G \neq \varnothing\} \text{ (брусы, пересекающиеся с границей) } B = \mathbb{T}_2 \setminus A$$

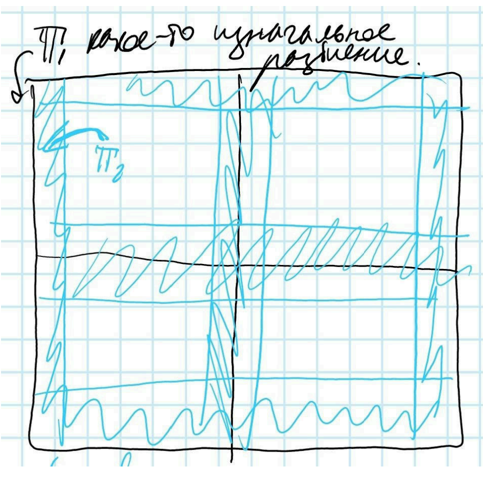


Рис. 1. Голубым выделено множество A

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathbb{T}_2 : \Delta_{\mathbb{T}_2} < \delta \hookrightarrow \left| \sum_{I_i^2 \in A} |I_i^2| \right| < \varepsilon$$

В силу того, что $G$ - множество меры нуль по Лебегу, то бруски разбиения у границы тоже будут иметь малый объем.

5. $I_i^2 \in B \Rightarrow I_i^2 \in \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$ (всё что не у границы).

   Хотим свести к определению предела: $|\underline{\mathcal{J}} - \underline{s}(f, \mathbb{T}_2)| < \varepsilon$

$$|\underline{\mathcal{I}} - \underline{s}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2)| = \underbrace{|\underline{\mathcal{I}} - \underline{s}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2)|}_{\circledast} + \underbrace{|\underline{s}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) - \underline{s}(f, \mathbb{T}_2)|}_{\star} = \oslash$$

$$\circledast : \underline{\mathcal{I}} - \varepsilon < \underline{s}(f, \mathbb{T}_1) \underbrace{\leq}_{\text{теорема выше}} \underline{s}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) \leq \underline{\mathcal{I}} < \underline{\mathcal{I}} + \varepsilon \text{ зажали по определению}$$

$$\star : |\underline{s}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) - \underline{s}(f, \mathbb{T}_2)| = \left| \underbrace{\sum_{I_i^2 \in B} m_i |I_i^2| + \sum_{I_i^2 \in \mathbb{T}_1 \cap A} m_i |I_i|}_{\underline{s}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2)} - \sum_{I_i^2 \in B} m_i |I_i^2| - \sum_{I_i^2 \in A} m_i |I_i^2| \right| \leq$$

$$\leq \sum_{I_i \in \mathbb{T}_1 \cap A} |m_i||I_i| + \sum_{I_i^2 \in A} |m_i||I_i^2| \leq \begin{bmatrix} \sum |m_i||I_i| \leq c \\ f \text{ огранич.} \end{bmatrix} \leq 2C \sum_{I_i^2 \in A} \underbrace{<}_{\text{по построению A}} \varepsilon$$

$$\oslash\, \varepsilon + 2C\varepsilon = \varepsilon(1 + 2C) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0 \Rightarrow \underline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta \to 0} \underline{s}(f, \mathbb{T}) \blacksquare$$

# Лекция 7. Опять интеграл Римана

*5 ноября 2024 г.*

**Теорема (Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману):**

$$\rceil I \subset \mathbb{R}^n, \quad f : I \to R$$

$$f \in R(I) \Leftrightarrow f - \text{ограничена на } I \quad \text{и} \quad \underline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}}$$

**Доказательство:**

**Необходимость**

$f \in R(I) \Rightarrow$ по необходимому условию интегрируемости функции по Риману $f$ ограничена на $I$.

*Идея:* показать, что $\underline{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$ и $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \Rightarrow \underline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}}$.

$$f \in R(I) \Rightarrow \exists \mathcal{L} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta \Rightarrow |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \mathcal{L}| < \varepsilon$$

$$\underline{\mathcal{L}} = \lim_{\Delta \to 0} \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) \Rightarrow |\underline{\mathcal{L}} - \underline{\mathrm{S}}| < \varepsilon$$

$$\underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) = \inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)$$

$$\forall \mathbb{T} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \xi : |\underline{\mathrm{S}} - \sigma| < \varepsilon$$

$$|\underline{\mathcal{L}} - \mathcal{L}| = |\mathcal{L} - \underline{\mathcal{L}} - \sigma + \sigma + \underline{\mathrm{S}} - \underline{\mathrm{S}}| \leq \underbrace{|\mathcal{L} - \sigma|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|\underline{\mathcal{L}} - \underline{\mathrm{S}}|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|\sigma - \underline{\mathrm{S}}|}_{<\varepsilon} \leq 3\varepsilon \Rightarrow \underline{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$$

Аналогично для $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$. Следовательно, $\underline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}}$.

**Достаточность**

$$f - \text{ограничена}$$

$$\underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) \leq \inf_{\xi} \sigma(\sigma, \mathbb{T}, \xi) \leq \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq \sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T})$$

При переходе к пределу получаем существование интеграла Римана.

■

**Определение (7.1):** Множество $D \in \mathbb{R}^n$ называется *допустимым*, если:
- $D$ ограничено
- Граница $D$ $(\partial D)$ – множество меры нуль по Лебегу

**Определение (7.2):** Пусть $D \in \mathbb{R}^n$ – допустимое множество, $f : D \to R$.

Тогда интегралом Римана $f$ по $D$ будем называть число $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \int\limits_{D} f(\overline{\mathrm{x}})\, \mathrm{d}\overline{\mathrm{x}} = \int\limits_{I \supset D} f(\overline{\mathrm{x}}) * \chi_{D(\overline{\mathrm{x}})}\, \mathrm{d}\overline{\mathrm{x}}, \quad \chi_D = \begin{cases} 1, & \overline{\mathrm{x}} \in D \\ 0, & \overline{\mathrm{x}} \notin D \end{cases}$$

**Лемма (корректность определения):**

$$\rceil I_1 \supset D, \quad I_2 \in D$$

$$\int\limits_{I_1} f * \chi_D \,\mathrm{d}\overline{\mathrm{x}} \quad \text{и} \quad \int\limits_{I_2} f * \chi_D \,\mathrm{d}\overline{\mathrm{x}}$$

либо одновременно существуют и равны, либо одновременно не существуют.

**Доказательство:** Так как $f * \chi_D \in R(I_1)$, по критерию Лебега $f * \chi_D$ ограничена на $I_1$. Тогда $f * \chi_D$ ограничена на $D$. Тогда $f$ ограничена на $D$. Тогда $f * \chi_D$ ограничена на $I_2$.

Также по критерию Лебега $f * \chi_D$ непрерывна почти всюду на $I_1$, а значит $f * \chi_D$ непрерывна почти всюду на $D$, а значит $f * \chi_D$ непрерывна почти всюду на $I_2$, так как дополнительные дочки разрыва могут появиться только на $\partial D$, а это множество меры нуль по Лебегу.

Тогда эти интегралы существуют и не существуют одновременно. Покажем, что они равны, если существуют.

Пусть оба интеграла существуют. Пусть $\mathbb{T}_i$ – разбиения на $I_i$, такие, что $\mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2$ совпадают на $I = I_1 \cap I_2$, а $\xi^i$ – отмеченные точки на $I_i$, такие, что $\xi^1$ и $\xi^2$ также совпадают на пересечении $I_1$ и $I_2$. Тогда

$$\begin{aligned}
\sigma(f * \chi_D, \mathbb{T}_1, \xi^1) &= \sum_j (f * \chi_D)(\xi_i^1) * \left|I_j^1\right| = \\
&= \sum_j (f * \chi_D)(\xi_i) * \left|I_j\right| = \\
&= \sum_j (f * \chi_D)(\xi_i^2) * \left|I_j^2\right| = \\
&= \sigma(f * \chi_D, \mathbb{T}_2, \xi^2)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{I_1} f * \chi_D \,\mathrm{d}\overline{\mathrm{x}} = \int\limits_{I_2} f * \chi_D \,\mathrm{d}\overline{\mathrm{x}}$$

■

**Теорема (7.1, Фубини):**

$$\rceil I_x \subset \mathbb{R}^n, \quad I_y \subset \mathbb{R}^m, \quad I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^{m+n} \text{ замкнутый брус, } f : I_x \times I_y \to \mathbb{R}$$

$$f \in R\big(I_x \times I_y\big) \wedge \forall x \in I_x : f(x,y) \in R\big(I_y\big)$$

$$\Downarrow$$

$$\int\limits_{I_x \times I_y} f(\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}}) \,\mathrm{d}\overline{\mathrm{x}} \,\mathrm{d}\overline{\mathrm{y}} = \int\limits_{I_x} \left( \int\limits_{I_y} f(\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}}) \,\mathrm{d}\overline{\mathrm{y}} \right) \mathrm{d}\overline{\mathrm{x}} = \int\limits_{I_x} \mathrm{d}\overline{\mathrm{x}} \int\limits_{I_y} f(\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}}) \,\mathrm{d}\overline{\mathrm{y}},$$

$$\int\limits_{I_x \times I_y} f(\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}}) \,\mathrm{d}\overline{\mathrm{x}} \,\mathrm{d}\overline{\mathrm{y}} = \int\limits_{I_y} \left( \int\limits_{I_x} f(\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}}) \,\mathrm{d}\overline{\mathrm{x}} \right) \mathrm{d}\overline{\mathrm{y}} = \int\limits_{I_y} \mathrm{d}\overline{\mathrm{y}} \int\limits_{I_x} f(\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}}) \,\mathrm{d}\overline{\mathrm{x}},$$

**Доказательство:**

$$\mathbb{T}_x = \{I_i^x\} \text{ — разбиение на } I_x, \quad \mathbb{T}_y = \{I_i^x\} \text{ — разбиение на } I_y$$

$$\mathbb{T}_{x,y} \text{ — разбиение на } I_x \times I_y$$

$$\mathbb{T}_{x,y} = \mathbb{T}_x \times \mathbb{T}_y = \left\{I_i^x \times I_j^y\right\} = \left\{I_{ij}\right\}$$

$$\left|I_{ij}\right| = |I_i^x| * \left|I_j^y\right|$$

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{S}}\big(f, \mathbb{T}_{x,y}\big) &= \sum_{i,j} \inf_{x \in I_{ij}} f(x) * \left|I_{ij}\right| \le \sum_{i,j} \inf_{x \in I_i^x} \left( \inf_{y \in I_j^y} f(x,y) \right) * |I_i^x| * \left|I_j^y\right| = \\ &= \sum_{i,j} \inf_{x \in I_i^x} \left( \inf_{y \in I_j^y} f(x,y) * |I_i^x| \right) * \left|I_j^y\right| = \\ &\le \sum_i \inf_{I_i^x} \underbrace{\left( \int\limits_{I_y} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right)}_{g(x)} |I_i^x| \le \underline{\mathrm{S}}(g(x), \mathbb{T}^x) \le \overline{\mathrm{S}}(g(x), \mathbb{T}^x) \le \overline{\mathrm{S}}\big(f, \mathbb{T}_{x,y}\big)\end{aligned}$$

$$\mathcal{L} \le \underline{\mathrm{S}}\big(f, \mathbb{T}_{x,y}\big) \le \underline{\mathrm{S}}(g, \mathbb{T}^x) \le \overline{\mathrm{S}}(g, \mathbb{T}^x) \le \overline{\mathrm{S}}\big(f, \mathbb{T}_{x,y}\big) \le \mathcal{L}$$

# Лекция 8. Функциональные последовательности

*12 ноября 2024 г.*

**Теорема (Замена переменных в кратном интеграле):**

$$M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n \text{ — открытые множества}$$

$$\varphi : M_1 \to M_2 \text{ — биективное отображение}$$

$$\varphi, \varphi^{-1} \text{ — непрерывно дифференцируемые отображения}$$

$$D \subset \mathbb{R}^n, \overline{D} \subset M_1 \text{ — допустимое множество}$$

$$f : \varphi(D) \to R,$$

где под непрерывно дифференцируемой функцией подразумевается непрерывная дифференцируемая функция, производная которой также непрерывна, а $\overline{D}$ – замыкание $D$.

Тогда

$$f \in R(\varphi(D)) \Leftrightarrow f(\varphi(t)) * \left|\det J_\varphi(t)\right| \in R(D)$$

и

$$\int\limits_{\varphi(D)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_D f(\varphi(t)) * \left|\det J_\varphi(t)\right| \mathrm{d}t,$$

где

$$J_\varphi(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_n} \end{bmatrix}.$$

**Доказательство:** без доказательства.

**Пояснение:** Теорема описывает процедуру замены переменных

$$(x_1, ..., x_n) \xrightarrow{\varphi} (t_1, ..., t_n), \quad x_i = \varphi_i(t_1, ..., t_n).$$

*Пример (Переход к полярным координатам):*

$$(x, y) \to (r, \varphi)$$

$$\begin{cases} x = r * \cos\varphi \\ y = r * \sin\varphi \end{cases}$$

$$J_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi * r \\ \sin\varphi & \cos\varphi * r \end{bmatrix}$$

$$\left|\det J_\varphi\right| = r$$

## 8.1 Функциональные последовательности

Функциональные последовательности отличаются от числовых последовательностей тем, что могут иметь какие-то ещё параметры кроме счётчика. Пример функциональной последовательности:

$$f_n(x) = \frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

что определяет последовательность

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

Числовые последовательности – это просто частный случай функциональных последовательностей.

$$\rceil f_n : X \to \mathbb{R}, \quad X \subset \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{R}$$

**Определение (8.1):** Будем говорить, что **последовательность функций** $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ **сходится в точке** $x_0 \in X$, если сходится соответствующая числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$, то есть

$$\exists a_{x_0} \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \left|f_n(x_0) - a_{x_0}\right|,$$

или, что то же самое, $\exists a_{x_0} = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$.

**Определение (8.2):** Множество точек $D \subset X$ точек, в которых последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, будем называть **множеством сходимости функциональной последовательности** $\{f_n(x)\}$.

**Определение (8.3):** Пусть $D \subset X$ множество сходимости $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и пусть $\forall x \in D$ : $f_n(x) \to f(x)$. Тогда $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ будем называть предельной функцией $\{f_n(x)\}$.

**Определение (8.4):** Будем говорить, что $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ **сходится поточечно** к $f(x)$ на $D$, если

$$\forall x \in D : \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

*Обозначение:* $f_n(x) \xrightarrow{D} f(x)$

*Примеры:*

1.
$$f_n(x) = \frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$\forall x_0 \in \mathbb{R} : f_n(x_0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{n} \overset{\mathbb{R}}{\longrightarrow} 0$$

2.
$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0; +\infty)$$
$$[0; 1] \text{ — область сходимости}$$
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$f_n(x) \xrightarrow{[0;1]} f(x)$$

Заметим, что хотя $f_n(x)$ – непрерывная функция на $[0;1]$ при фиксированным $n$, предельная функция $f(x)$ не является непрерывной.

3.
$$f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}$$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} : f_n(x_0) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\mathbb{R} - \text{область сходимости}$$

$$f(x) = 0; f_n(x) \xrightarrow{\mathbb{R}} f(x)$$

$$f_n'(x) = n\cos(n^2 x), \quad f_n'(x) \text{ не имеет предела}$$

$$f'(x) = 0$$

Таким образом, производная функции не связана напрямую с производной предельной функции.

4.
$$f_n(x) = 2(n+1)x(i - x^2)^n \text{ на } [0;1]$$

$$f_n(0) = 0; \quad f_n(1) = 0$$

$$f_n(x) = 2(n+1) * x * \underbrace{q^n}_{\to 0} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int\limits_0^1 2(n+1)x(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = \frac{2(n+1)}{2}\int\limits_0^1 (1-x^2)^n d(-x^2+1) = -(1-x^2)^{n+1}\Big|_0^1 = 1$$

Видно, что и интеграл предельной функции тоже ведёт себя не так, как интеграл самой функции.

$$D \subset \mathbb{R}, \quad f_n, f : D \to \mathbb{R}$$

**Определение (8.5):** Будем говорить, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ **сходится равномерно** к $f(x)$ на $D$, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

*Обозначение:* $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$

*Примеры:*

1. Функция $f_n(x) = \frac{x}{n}$ равномерно сходится к нулю, если как область определения $f_n$ мы рассматриваем некоторый отрезок $[-M; M]$, так как

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall x \in D : \left|\frac{x}{n}\right| < \frac{M}{n} < \varepsilon$$

2. Функция $f_n(x) = \frac{\sin(n^2x)}{n}$ равномерно сходится к нулю, так как

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall x \in \mathbb{R} : \left|\frac{\sin(n^2x)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

**Теорема (Супремальный критерий):**

$$f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \lim_{n\to 0}\left(\sup_D|f_n(x) - f(x)|\right) = 0$$

**Доказательство:**

*1. Необходимость.*

$$f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sup_D|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

*2. Достаточность.*

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_D|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

■

# Лекция 9. Теоремы о равномерной сходимости

*19 ноября 2024 г.*

*Замечание:* Из **равномерной поточечной сходимости** следует **поточечная сходимость**, но не наоборот.

**Теорема (Критерий Коши равномерно сходящиейся функциональной последовательности):**

$$f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m > N : \forall x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

**Доказательство:**

- *Необходимость.*

$$f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m > N : \forall x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

- *Достаточность.*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m > N : \forall x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall x_0 \in D : \exists \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

по критерию Коши для числовой последовательности $f_n(x_0)$.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m > N : \forall x_0 \in D : |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Устремим $m$ к бесконечности:

$$\forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : \forall x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

■

*Следствие (Отрицание критерия Коши):*

$$f_n \overset{D}{\not\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall N : \exists n, m > N : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon_0$$

**Теорема (О почленном переходе к пределу):**

$$f_n, f : D \to \mathbb{R}$$

$$x_0 \text{ — предельная точка } D$$

$$f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists \lim_{x \to x_0} f_n(x) = c_n$$

Тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Или, что то же самое

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right).$$

**Доказательство:** Для начала, покажем существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.

Рассмотрим:

$$|c_n - c_m| \le \underbrace{|c_n - f_n|}_{(1)} + \underbrace{|f_n - f_m|}_{(2)} + \underbrace{|f_m - c_m|}_{(3)}$$

(1), (3): из условия

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists \lim_{x\to x_0} f_n(x) = c_n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{B}_\delta(x_0) \cap D : |f_n(x) - c_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(2):

$$f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x)$$

$$\Rightarrow \text{по критерию Коши } \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m > N : \forall x \in \mathring{B}_\delta(x_0) \cap D : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Собрав воедино, получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m > N : \forall x \in \mathring{B}_\delta(x_0) : |c_n - c_m| < \varepsilon \Rightarrow \exists c = \lim_{n\to\infty} c_n$$

Покажем, что $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$.

$$|f(x) - c| \le \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{(1)} + \underbrace{|f_n(x) - c_n|}_{(2)} + \underbrace{|c_n - c|}_{(3)}$$

(1):

$$f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n \in N_1 : \forall x \in \mathring{B}_\delta(x_0) \cap D : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(2):

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists \lim_{x\to x_0} f_n(x) = c_n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall x \in \mathring{B}_\delta(x_0) \cap D : |f_n(x) - c_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(3)

$$\exists \lim_{n\to\infty} c_n = c \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N_2 : \forall n > N_2 : \forall x \in \mathring{B}_\delta(x_0) \cap D : |c_n - c| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|f(x) - c| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - c_n| + |c_n - c| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = c$$

■

**Теорема (О непрерывной предельной функции):**

$$f_n, f : D \to \mathbb{R}$$

$$f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_n \in C(D)$$

$$\Rightarrow f \in C(D)$$

**Доказательство:**

$$f \in C(D) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{(1)} + \underbrace{\left|f_n(x) - f_{n(x_0)}\right|}_{(2)} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{(3)}$$

(1):

$$f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f : \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \in N : \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(3): аналогично $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

(2):

$$\forall n \in N : f_n \in C(D) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D : |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Соберём воедино:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \exists N : \forall n > N : \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall x_0 \in D : f(x) \in C(x_0)$$

$$\Rightarrow f(x) \in C(D)$$

■

**Теорема (Условие 1 о неравномерной сходимости – о разрыве в точке):**

$$f_n \in C([a; b))$$

$$f \in C((a; b)) + \text{разрыв в точке } a$$

$$f_n \overset{[a;b)}{\to} f$$

$$\Rightarrow f_n \overset{(a;b)}{\not\rightrightarrows} f$$

**Доказательство:** От противного.

Пусть $f_n \overset{(a;b)}{\rightrightarrows} f$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n \in N_1 : \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Так как $f_n \overset{[a;b)}{\to} kf$, то

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_2 : \forall n \in N_2 : |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$$

Тогда $f_n \rightrightarrows [a; c)$, так как

$$\forall \varepsilon : 0 : \exists N = \max\{N_1, N_2\} : \forall n > N : x \in [a; b) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Тогда по теореме о непрерывности предельной функции $f \in C([a; b))$, но по условию $f$ имеет точку разрыва в $a$. Противоречие.

■